Title	通俗天文講話(第五講) : 萬有引力の法則は如何にして導き出されたか
Author(s)	荒木, 俊馬
Citation	天界 = The heavens (1925), 5(56): 311-319
Issue Date	1925-08-25
URL	http://hdl.handle.net/2433/160293
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

通俗天文講話（第五講）

萬有引力の法則は如何にして導き出されたか

荒木俊馬

一

チヒョウ、ブラーヘの死後、其の觀測材料を彼の助手ヨハン、ケプレル(Johann Keppler)が整理研究してはからずも有名なケプレルの三大法則を發見したのは、第十七世紀の初葉即ち千六百七年から千六百二十年迄の間である。遊星運動に關する此の三大法則の發見はアイザック、ニユートンをして萬有引力の法則の發見せしむる導火線となつたのみならず、實に近世の數理的な天文學即天體力學の燦然たる發展の黎明第一線と考へて蓋し過言ではあるまい。

私は本講に於て萬有引力の法則がニユウトンの如何なる論理的推論を經て完成せられたかを物語らうと思ふ。然し前もつてことはつて置かねばならない事は、かゝる問題を論ずるに當りて數學の公式を拔きにするのは恰も靴を隔てゝ痒きをかくの嘆をまぬがれない。それかと言つて高等な數學を用ひれば、それに親しみのない讀者にとつては恰も楔形文字の碑銘に面接するにも等しからう。私のこの講話は專ら通俗を旨とする。で數式は拔きにして話を進めたいと思ふが、不幸にして筆者の拙文或は嚙んで含めるが如くにいかないであらう。寛大なる讀者諸君諒せられよ。

二

ケプレルの法則は次の三つより成る。

一、すべての遊星は楕圓形の軌道上を運行し、太陽は其の楕圓の一つの焦點になつて居る。

二、太陽と一遊星とを結ぶ線分は其の遊星の軌道上の如何なる場所に於ても一定の時間に一定の面積を描く。

三、遊星の公轉の週期の自乘と、太陽と其の遊星との平均距離の

六

三乘との比はすべての遊星に就いて一定である。

先づ以上の三法則を少しく説明しやう。

楕圓とは如何なる曲線であるか。楕圓の性質に就ては天界第一卷第十號及十一號に松本理學博士の『二次曲線の話』と言ふ文に詳細に論じてあるから詳しい事は同文を參照してもらう事にして茲には極く簡單に述べやう。

今試ろみに一枚の紙と一本の糸とをとりて糸の兩端を紙上の二點にピンも以て留める。二點間の距離は糸の長さよりも遙かにみじかくとる。例へは半分位にして置くとしやう。更に一本の鉛筆をとりて糸の上に置き糸を充分に緊張せしむれば鉛筆の心と二定點とで一つの三角形が出來る。この三角形の形は鉛筆の位置の如何によりて色々に變化するが、かくの如く糸を常に緊張せしめた儘、三角形の形を次第にかへながら鉛筆を一まわり動かせば此處に閉ぢた一つの曲線を得る。これを數學的に言へば二定からの距離の和が一定なる點の軌跡を得る。この曲線が卽ち楕圓と名づくる曲線であつて、糸の兩端なる二定點を楕圓の焦點と言ふ。茲につけ加へて置くが二つの焦點が段々近づいて一致すると楕圓は遂に圓となる。圓は楕圓の特別の場合である。

扨て、これから先に必要な楕圓に關する二三の用語を説明して置かう。第一圖を參照せられよ。二つの焦點 E F を結ぶ直線が楕圓周と交る點を A 及 B とし AB の中點 O を通り AB に垂直な直線が楕圓周と交る點を C D とする。AB を楕圓の長軸と言ひ CD を楕圓の短軸と言ふ。茲で讀者諸君の直ちに氣付くことは長軸の長さ AB は丁度前に説明した糸の全長に丁度等しくなつて居る事である。それは次のやうに考へれば容易に理解出來る。鉛筆の先が丁度 A に來た時を考へよ。糸の長さは EA と AF の和になる。然るに AE と BF は等しく、糸の長さはいつでも同じであるからである。所で、焦點間の距離と長軸の長さ卽ち糸の長さの割合を種々に變へる事によつて色々な楕圓が出來るのである實際やつてみればすぐ判る事であるが、糸の長さを一定にしておいて、焦點を段々遠ざけて行けば、段々扁平な楕圓が得られる。此扁平の割合をあらはすに離心率と言ふ量を用ひる。今長軸の半を a とし短軸の半を b とし、離心率を e とすれば

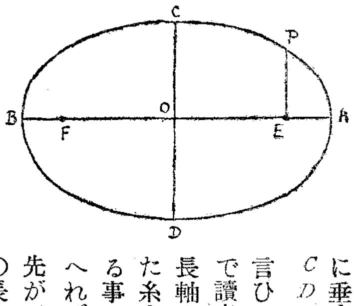
$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

そうすると

$$OE=OF=ae$$

と言ふ關係になつて居る。圓の場合には a と b は等しいから圓の離心率は零である。

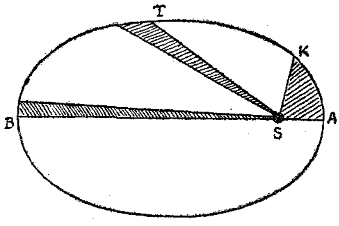
第一圖



扨てこれだけの準備をして置いてケプレルの法則の說明に移らう。第一の法則は說明する迄もなく明らかである。

第二法則に就いて少しく說べやう。今第二圖に就て、Sを太陽の位置としてATBを一遊星の軌道とする。言ふまでもなくATBは楕圓でありSは其の一つの焦點になつて居る。遊星の任意の位置をTとすれば、STと言ふ線分は常に同一の時間に同じ面積を描く。卽ち單位時間にSTなる線分は一定の面積を描く。力學的に言へば面積速度が軌道上の何處でも一定と言ふ事である。Aに於ては遊星は太陽に最も近くBに於て最も遠い。從つて單位時間に動く遊星の道程はAに於ける方がBに於けるよりも長くなくてはならぬ卽ち焦點の近くでは遊星は最も早く動くのである。Aなる點を天文學上では近日點と言ひ、Bを遠日點と言ふ。第二圖に於て斜線をつけたやうな有樣に遊星は單位時間に一定の面積を描くのである。これが第二法則である。

第二圖



次に第三法則を說明しやう。太陽系の諸遊星は第一の法則が示すやうに各々太陽を一つの焦點とするやうな別々の楕圓形の軌道の上を運行する。勿論こゝに斷はつて置くが楕圓と言つても極く離心率の小さな楕圓で圓に非常に近い軌道である。これ等の軌道の大さも大小樣々あるし、それ等の軌道上を遊星が一巡する公轉週期も皆異なる。所で、楕圓の性質を數學的に研究して見ると一つの焦點から周上の各點までの距離の平均は丁度長軸の半のaに等しくなるのである。故にaは言ふまでもなく軌道の規摸の大小を表はすものである。所が第三法則によれば各遊星の公轉週期Pと其の軌道の長軸の半aとの間に密接な關係があるのである。卽今第一の遊星の週期と長軸の半とをPとaとし、第二の遊星のそれ等をP'及a'とし、第三のものをP''及a''とし以下かくの如くすれば、すべての遊星について

$$\frac{a^3}{P^2}=\frac{a'^3}{P'^2}=\frac{a''^3}{P''^2}=\cdots\cdots=\text{常數（すべての遊星に就て）}$$

なる關係がある。これがケプレルの第三の法則である。

三

ケプレルが此の三大法則を發見したのは前にも述べたやうに、十七世紀の初葉であつた。ケプレルは千六百三十一年に永眠した。そして彼の殘した三法則は天體の運行の眞相卽ち天體の運行が事實如何なる法則に從つて居るかの眞相をたゞ如實に物語りながら約半世紀の間默々として居たのである。人類の智識は『如何に』から『何故に』へと追求する。千七百二

十年この三つの法則が發表せられて以來、天文學者達のうちには『すべての遊星は何故にこの三法則に從つて運行するであらうか』こ反問した人達があつた違いない。その解決をしやうこして研究をかさねた人達もなかつたこは言へまい。けれごもこの〳〵大きな問題を解決する爲めには必ず天才の出現が必要であつた。半世紀の間の沈默、それは大きな人類知識の進歩の上から言つて決して長いこは言へないのである。事實、その半世紀の間に、偉大なる天才は母胎の中に呼吸し搖籃の中に眠り、又人間の言葉を學び——そうして、偉大なる萬有引力の大法則はそれこ共に成長の呼吸を呼吸しつゝあつたのである。千六百四十二年そは實に地動論の大成者、時計の發明者、重力加速度の最初の測定者、等々、の近世天文學及物理學の創設者ガリレオ、ガリライが死んだ年であるが同時にこゝに語らむこするアイザック、ニユウトンの生れた年なのである。

今茲に讀者諸君の熟知せるニユウトンの生ひ立ちを語る必要はあるまい。ニユウトンは自ら今日の微積分なる高等數學を創設した。又力學の根本基礎である運動の三法則を創案した。そしてその數學的解折腦力の優秀なるをもつて物理學及天文學の方面に、到る處、獨創的な貢獻を殘しつつゝ猛進したのである。

ケプレルの遊星運動の三法則が此の英蘭の天才の研究の對象こなつたのは偶然ではない。萬有引力の法則を思い付いたのは千六百六十六年、實に彼の二十四歳の時であつたのである。其の後千六百八十二年嚴密な計算をしなをし千六百八十七年 Principia mathematica philosophiae naturalis の中に他の力學の諸研究こ共に發表したのである。

私は以下、ケプレルの三法則から、如何なる論理的な推理の段階を經て萬有引力の法則に到達するかを述べたい。勿論これはニユウトンがたごつた推理の通りではないかも知れない。

四

ニユウトンの運動の第一法則に『すべて物體は外より何等の作用をも受けざる限り、永久に靜止するか一直線上に等速運動を持續す』こある。こゝに空間の唯中に一つの天體があるこする。これに何等の力の作用もないならば、その天體は永久に靜止して居るか一直線上を等速運動をする。これは力學の根本法則である。然るにケプレルの第一法則を見るにすべての遊星は楕圓形の軌道を動く。すでに直線運動をせぬのみならず、ケプレルの第二法則に從へば、其の面積速度は常に一定なるが故に、前に説明したやうに太陽の近くではその速度は速く、太陽より遠くはなれるにしたがつてその速度は遲い。卽ち斯く考へ來れば遊星の運動は直線運動をなさな

いのみならず、その速度も一定でない。これは何を意味するか。ニユウトンの運動の第一則に照してこの遊星には絶へず外から力が作用して居る事は明らかである。ニユウトンは此の力の何者なるかに注目したのである。更にニユウトンの運動の第二法則に曰く『物體の有する加速度と其質量との相乘積はその物體に作用する力に等しい』

扨て先づ、吾々はケプレルの第二法則を考へるに、面積速度が一定と言ふ事を數學的の式で書きあらはして見るとそれは遊星の有する加速度は常に太陽と遊星とを結ぶ直線上にあつて太陽の方向に向ひ、これと直角の方向には何等の加速度をも有しないと言ふ事になるのである。これは嚴密な數學上の推理によつて直ちに出て來る結論であつて微積分及力學の簡單な知識を有する人は直ちに導き出せる。兎に角遊星の加速度が常に太陽の方向に向ふ。故に又運動の第二の法則によつて遊星に作用する力は常に太陽の方向に向ふのである。卽ち向心力である。今茲に極く卑近な例をとつて説明するに、一つの分銅を糸の先に結びつけて振りまわせば分銅は一つの圓を描いてまわる。これは言ふまでもなく糸がたえず分銅を中心に向つて引ぱつて居るので、卽ち分銅には糸による一種の向心力が作用して居るのである。で、今或瞬間に糸を切斷するならば、分銅はこの糸の切斷される瞬間にもつて居る速度をもつてその時の圓への切線の方面に飛び去る。これは糸を切斷した瞬間に糸による向心力が消滅した證據である。遊星の運動の場合の向心力は今の例の糸に相等するのである。太陽はこうした向心力を遊星の各々に作用するのである。

然らば此の向心力の大さは如何、これ第二の問題である。此の問題を解決するにはケプレルの第一の法則から出發すればよい。遊星は皆太陽を一つの焦點に有する。楕圓の上を運行する解析幾何學と言ふ數學によればすべての曲線は方程式によつて書き表はされるが、これを利用して楕圓の方程式を作り、それに數學的式の計算をほどこしケプレルの第二法則と結合すると容易に次のやうな式を導き出す事が出來るのである。

今遊星に作用する向心力をF、遊星の質量をm太陽と遊星の距離をrとすれば

$$F=C\frac{m}{r^2}$$

こゝにCは一つの常數である。而もこの常數は各遊星に就いて容易に計算出來るもので、今長軸の半をa公轉週期をP圓周率をπとすれば

$$C=4\pi^2\frac{a^3}{P^2}$$

所が茲に都合がよい事に、ケプレルの第三の法則によればaの三乘とPの自乘の比はすべての遊星に就いて一定不變で

ある。又圓周率は御承知の通り三・一四一五九………で全く常數であるから C はすべての遊星を通じて變る事なき常數である。故に吾々は、遊星に作用する力の法則に致達したのである。而もこの遊星に作用する力は言ふ迄もなく太陽の引力であらねばならぬ。卽ち曰く

『太陽の遊星に作用する力は遊星の質量に比例し、太陽からの距離の二乘に逆比例する』

而もこの法則は少くとも各遊星が運行する空間のすべての部分に普遍に行はれる法則なのである。

諸君、こゝですでに吾々は萬有引力の法則に到達したものであるかの如く早合點するならばそれは大いなる間違ひである。吾々は單に太陽の各遊星に作用する力のみに關する法則を得たにすぎないのである。萬有引力を歸納し得るまでには更に多くの階段を經なければならなかつたのである。私は次にその事を物語らう。

五

更に考へを進めて遊星の周圍を廻る衛星の運動は如何。今日例へば木星の四つの衛星に就いて觀測して見るにやはりケプレルの法則が行はれて居りそれから結論して同じやうな力の法則が行はれて居る。勿論此の場合にはそれ等衛星の軌道の離心率がよほどよくわかつて居なければ、その距離の變化

が出て來ないからこれ等の法則を誘出する事は困難である。手近い話が地球も太陽を廻る遊星の一つである。然も月と言ふ大きな衛星をもつて居る。此の場合には衛星の數が唯一つであるからケプレルの第三の法則は確める事は出來ないが第一と第二の法則はたしかめられる。この兩法則から計算すると月に作用する地球の引力は月の質量を m' とし兩者の距離を r' とすれば

$$C\frac{m'}{r'^2}=4\pi^2\frac{a^3}{P'^2}\frac{m'}{r'^2}$$

となる。a' は月の軌道の長軸の半 P' は月の週期である。

然るに月の場合には其の軌道は非常に圓に近く從つて其の離心率は殆んど零である。故に一週の間に於ける距離の變化はほとんど無いと見てもよい位であるから、今 r' を先づ a' に等しいと見れば、月の受ける平均の力は

$$4\pi^2\frac{a'}{P'^2}m'$$

であり其の平均の加速度は

$$4\pi^2\frac{a'}{P'^2}$$

である。

扨て地球を球形と見て其の半徑を R とすれば、月までの距離は R の約六十倍である。然るに地球の周圍卽ち $2\pi R$ は約四

萬粁月が地球を一巡りする時間は二十七日七時四十三秒であるからこれ等の値へを前の式に代入すると月の受ける平均加速度は

毎秒 秒 0.002706 米

と言ふ値になる。(勿論ニユウトンがはじめこれ等の値を計算した時には月までの距離の測定が不確であつた爲めニユウトンは長い間萬有引力に關する論文の發表を見合せて居て、後に可なり正確な測定が出て計算の結果と實測の値がよく一致するを得てはじめて發表したと言ふやうな事はニユウトンの落ちついた謙遜な態度として美談とされて居るが筆者はそれ等に關する詳しい歴史を忘れて今これを紹介する事が出來ない)。

ニユウトンの林檎の逸話は甚だ有名であるが、私はニユウトンに此の林檎の事件があつたのは、ニユウトンがこの月に關するやうな事柄を考へながら色々と苦心して居た時の事だらうと思ふ。

それは丁度夕暮ででもあつたらうか。いつもの樣に、ニユウトンは考へぬいた頭の中になをもこうした問題を瞑想しながら暮れ行く庭を逍遙して居たであらう。風のない靜かな日であつたらう。ふとニユウトンの眼に映じたのは風もなきに地上に落ちた一つの林檎であつた。……………ニユウトンは此の時忽焉として悟を開いた。『地球が月を引く力。太陽が諸遊星を引く力…………此の宇宙の深遠な力は小さな紅の一つの林檎にも宿つて居るに違いない。地球が月を引く力は卽ち林檎が風なきに落ちる爲めに作用する力でなくてはならぬ…………』。ニユウトンはこう言ふ風に悟を開いたであらう。彼の前には、豁然たる光明の天地がひらけたのである。

重力!!

重力も又地球の引力による加速度であらねばならぬ。地球は月と言ふ唯一つの衛星しかもつて居なかつた。その爲めにケプレルの第三法則はこれを確かめるに由がなかつた。けれども今やニユウトンは地球の第二の衛星を發見したのであるそれは紅の小さな林檎の玉であつた。月と林檎。それがかくも密接な關係に於て結びつけられた事は古往今來嘗てなかつた事であらう。ニユウトンの天才はよくそれをなしとげたのである。『林檎を引く力も月を引く力も同じ法則に支配されなければならない』それがニユウトンの着想であつた。

地球の中心から月までの距離は地球の表面までの距離卽地球の半徑の六十倍である。然るに地球の引力による加速度は距離の自乘に逆比例する。故に地球の表面における加速度は月の受ける加速度の六十の二乘倍でなくてはならない。この理論によつて地球表面の加速度を計算すると

$0.002706 \times 60^2 = 9.74$ 秒々米

然るに實際の測定による地球表面上の加速度は9.82秒々米で

ある。地球の形が純粋の球でない事や、其他色々な原因を考へ來ればこの兩者の値の一致は非常に良いと言はねばならない、かくて吾々は

『月をしてその軌道上に運行せしめる力は地球上の重力と同一のものであり、距離の逆二乘の法則に從ふ』と言ふ結論に達した。

六

更に吾々は論を進めやう。ニユウトンの運動の第三法則卽力の法則によれば『作用と反作用は等しく方向相反す』る。今一つの天體 A が他の天體 B に F と言ふ引力を及ぼすならば、同時に B は A に同じ引力 F を作用せなくてはならない。卑近な例を以て言へば、こゝに水上に浮ぶ二つの舟があるとしやう。今兩舟を一條の繩をもつて結び、甲舟の人が乙舟を自分の方に近づけんと繩を引ぱる。そうすれば、兩舟は相互に近づくを見るであらう。これは何を意味するか。言ふまでもなく甲舟が乙舟に一つの引力を及ぼせば、乙舟は同時に同じ引力を甲舟に及ぼすからである。力とは實際こう言ふ性質のものである。反作用なき作用は力には存在せぬのである。二つの天體の場合も舟の場合と全く同樣である。

扨て太陽は一つの遊星に次の式で與へられる F と言ふ引力を作用する。卽ち太陽はその遊星を F と言ふ力で引ぱる。

$$F=C\frac{m}{r^2}$$

そうするとその遊星は同時に同じ力 F で太陽を引ぱる理屈である。今太陽の質量を M とすれば、兩者の距離にかわりがないから太陽と遊星との主客を轉倒する事によつて F は又

$$F=C'\frac{M}{r^2}$$

なる式で與へられなくてはならない。C' は他の常數である。同じ F であるから

$$C\frac{m}{r^2}=F=C'\frac{M}{r^2}$$

故に

$$Cm=C'M$$

或は

$$\frac{C}{M}=\frac{C'}{m}=\text{常數}=G$$

故に質量 M なる太陽と質量 m なる遊星とが相引く引力は

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

卽ち言葉をもつて言へば、此の引力は兩天體の質量の相乘積に比例し其の距離の自乘に逆比例する。

すでに太陽も遊星も衛星も林檎も皆この法則によつて支配

されるのが成立するものと假定するに躊躇するであらうか。

萬有引力の法則は斯くの如くして導き出された。曰く

『宇宙間に於ける任意の二つの物體は其れ等の質量の相乘積に比例し、その距離の自乘に逆比例する力によりて互に相引き合ふ』と。

（第五講終）

來信

去る七月英國ケンブリヂ大學に於て開かれた世界天文同盟（International Astronomical Union）第三回總會に出席された平山博士よりの來信、

拜啓

二十二にケンブリヂの會はすみ、それよりグリニチの創立二百五十年紀念祝賀があり、又、オクスフオドよりの招待會がありました。列席した天文學者の數名より「宜しく」申してくれと頼まれました。

七月三十日　ロンドンにて　平山清次

京都帝國大學
新城教授殿
山本教授殿

通信

前略。昨十一日夜變光星の觀測の傍流星の出現に注意して居りますとはたして八時八分に至り可成大きな火球を認めました。發光點は350°＋61°で消滅點は300°＋10°即ちケフエウス座の東端から鷲座に至るもので光度負四等位、色は黃白、繼續時間は約七秒、痕は約一分の後まで認められましたが銀河より數等濃く經路も眞直でした。其他二、三の流星を觀測いたしましたが恰度ラジオで天氣豫報の放送が始まりましたので中止して、それを聽きますと明日は曇勝ちとの事で拂曉では或は天氣がどうかと思ひ目醒は十二時にかけウオツチはタイムシグナルに合せて寢みました。

その夜雲が出てきて觀測に不適當になつてしまつた二時過ぎまでに十五ケの流星を促へ得ました。痕を殘したものは二ケで一は鯨座に一はアンドロメダの東邊より鯨座に達する長いものでしたが共に顯著ではありません。

それに前夜のは時刻も宵の事であるし一年中で最も流星の多いといはれてゐる日でもあるし又美事な火球でゝもありますので會員諸氏中には必ず觀測なされた方が多數おいでになる事と思ひます。右御參考まで申上げます。　草々

八月十二日　東京府下立川町にて　岩崎良三

山本先生